

Introducción

Todas las gráficas con las que trabajamos son gráficas finitas y simples. Este trabajo fue motivado por un problema abierto del artículo de *Graphs whose complement and square are isomorphic*. Dada una gráfica G , el cuadrado de está denotado por G^2 , es la gráfica que consta del mismo conjunto de vértices de G , pero $uv \in G^2$ si y solamente si la distancia de u, v en G es 1 o 2. \bar{G} denota al complemento de la gráfica G , en la cual tenemos el mismo conjunto de vértices y $uv \in \bar{G}$ si y sólo si $uv \notin G$. Decimos que una gráfica G es cuadrado complementaria si cumple $G^2 \cong \bar{G}$ o equivalentemente $G \cong \bar{G}^2$. Usaremos el término de *squco* para referirnos al término cuadrado-complementario, por su abreviatura en inglés; *square-complement*. Algunos ejemplos de gráficas squco son la gráfica trivial K_1 , el ciclo de 7 vértices C_7 y la gráfica de Franklin:

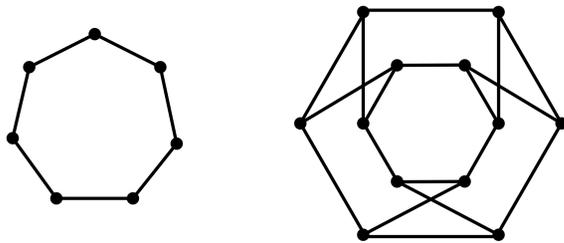


Figura 1: Ejemplos de gráficas cuadrado complementarias.

Objetivo

Dar una respuesta al problema abierto planteado en [1, 4]: **Dado un número par $d \geq 4$, ¿existe una gráfica squco, d -regular con $d^2 + d + 1$ vértices?**

Desarrollo del problema

Por definición si tenemos una gráfica d -regular, tenemos que $\forall x \in G$ tenemos que $deg_G(x) = d$. La longitud del ciclo más pequeño dentro de una gráfica se denomina cuello (*girth*) y es denotada por $g(G)$. Notemos que si tenemos una gráfica cuadrado-complementaria no trivial G que sea d -regular, entonces G tiene como máximo $d^2 + d + 1$ vértices; debido a que G es regular de grado d , sin pérdida de generalidad escogemos un vértice cualquiera llamémosle u el cual tiene d vecinos, a una distancia dos de u tenemos a lo más $d(d-1)$ vecinos más y por último el número de vecinos a una distancia de al menos 3 tenemos d esto ya que G satisface la condición de ser cuadrado-complementaria, $G \cong \bar{G}^2$ y estos últimos vecinos a distancia 3 serán los vecinos a distancia 1 de u en \bar{G}^2 que también tiene que ser d -regular. Por lo tanto $|G| \leq 1 + d + d(d-1) + d = d^2 + d + 1$. Recordemos que la estructura descrita no depende del vértice elegido al inicio pues G es d -regular. Cuando consideramos la longitud del ciclo más pequeño, i.e. el cuello de G , se satisface que $g(G) \geq 5$ si y sólo si $|G| = d^2 + d + 1$. Las gráficas que buscamos deben cumplir: $g(G) = 5$ y ser 4-regulares, además de ser cuadrado-complementarias lo que implica que $|G| = 21$. Un ejemplo de la estructura buscada es:

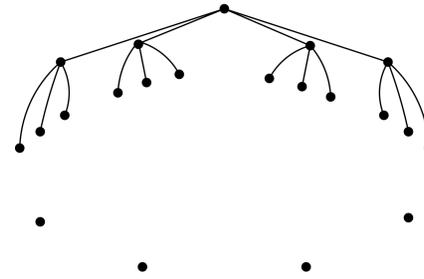


Figura 2: Andamiaje para G cuadrado-complementaria 4-regular con $g(G) = 5$.

El problema se encontraba en encontrar el conjunto de 26 aristas que completaba a G de la figura 2, y la hacían ser cuadrado-complementaria de un conjunto total de 108 posibles aristas; las cuales provienen de las $\binom{16}{2} = 120$ y a este conjunto le quitamos las aristas que forman un 3-ciclo en cada conjunto de vértices que se encuentran a distancia 2 del vértice superior (12 aristas), dando como resultado un conjunto de búsqueda de: $\binom{108}{26} = 6'909,598'959,706'679,434'990,092 \approx 7 \times 10^{24}$. Para abordar el problema se optó por usar la herramienta de programación de GAP [3] y el paquete de YAGS [2], con el cual se desarrolló un algoritmo basado en principio en la técnica de *Backtracking* o *branch and bound*, con la finalidad de podar posibilidades que no condujeran a alguna solución disminuyendo tiempo y opciones de soluciones fallidas a explorar.

Backtracking

Backtracking es una técnica algorítmica de búsqueda en espacios combinatorios con estructura arbórea; con énfasis en el podado de ramas inútiles, como lo es en nuestro caso, para hacer uso de esta técnica debemos hacer énfasis en el podado de ramas inútiles ya que por medio de estas logramos acortar el amplio espacio de búsqueda que tenemos para las soluciones. Analizando las posibles soluciones encontramos que las gráficas tienen una simetría muy buena lo cual nos permitió encontrar un punto clave para desechar posibilidades fallidas ya analizadas y con ello optimizar el tiempo empleado a la resolución de nuestro problema, pues al ir escogiendo aristas podemos desechar algunas configuraciones isomorfas a otras analizadas con anterioridad.

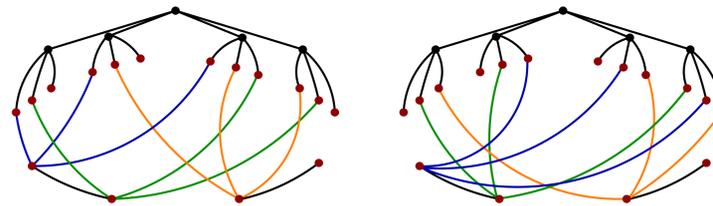


Figura 3: Andamiajes con configuraciones diferentes pero isomorfas.

Resultados

Algoritmo

Después de varias versiones que lograran disminuir el tiempo y el conjunto de posibles soluciones al problema obtuvimos un algoritmo que se compone de varias funciones, las cuales verifican cada una de las características que buscamos verificar que satisfagan las gráficas que buscamos. Entre las cuales se encuentran:

- Que no existan triángulos, ciclos de tamaño 3, en G y en \bar{G}^2 .
- Que no existan cuadrados, ciclos de tamaño 4, en G y en \bar{G}^2 .
- Función que analiza las simetrías en la gráfica.
- Verifica que cada vértice no exceda el grado 4.

- Función interna del Backtrack, verifica si la solución que tenemos hasta el momento se puede completar.
- Función interna del Backtrack, indica si hemos encontrado una solución de 26 aristas que completen a G .
- Verificar que se satisfaga $G \cong \bar{G}^2$.

Además de esto se considera analizar el problema en 6 casos; los cuales provienen de ser todas las maneras diferentes hasta isomorfismo de colocar aristas en la parte inferior de nuestro árbol sin llegar a formar triángulos (ciclos de tamaño 3), determinados de la siguiente manera:

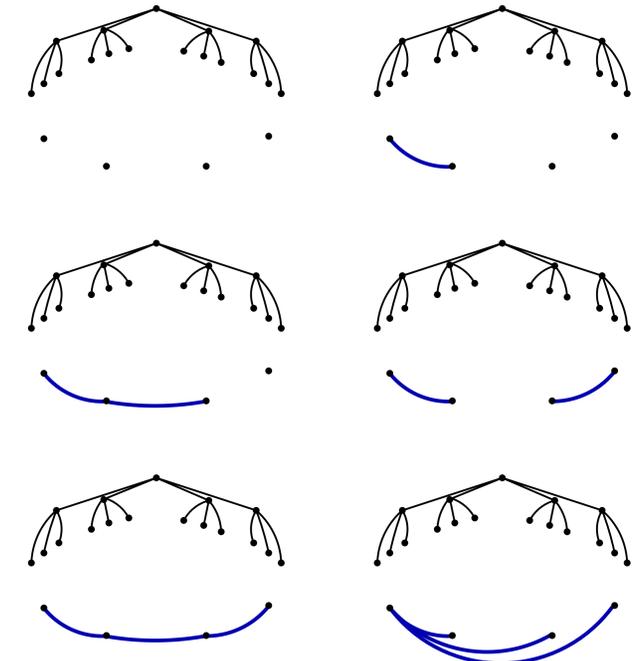


Figura 4: Casos a considerar con las aristas posibles con los vértices en el tercer nivel del andamiaje con 0, 1, 2 y 3 aristas respectivamente.

Con todo ello se redujo el trabajo de analizar casi 7×10^{24} de casos a tan sólo 43 casos.

Conclusiones

Después de las horas empleadas a programar dicho algoritmo que ayude a saber si existen las gráficas cuadrado-complementarias 4-regulares con cuello 5, logramos dar respuesta de que **dichas gráficas no existen**, reduciendo el conjunto de búsqueda considerablemente para dar solución a la interrogante en tan solo 10 minutos. Además de buscar alguna característica que ayude a reducir más el conjunto de posibilidades para dar una prueba con un número pequeño de casos. Claro el trabajo continúa analizando que pasa para el caso general con gráficas cuadrado-complementarias d -regulares con $g(G) \geq 5$, y en particular para $d \geq 6$.

Referencias

- [1] V. Baltić, S. Simić and V. Tintor. *Some remarks on graph equation $G^2 = \bar{G}$* . Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. **5** (1994) 43–48.
- [2] C. Cedillo, R. MacKinney-Romero, M.A. Pizaña, I.A. Robles and R. Villarroel-Flores. *YAGS - Yet Another Graph System, Version 0.0.5*, 2019. <http://xamaneke.izt.uam.mx/yags/>.
- [3] The GAP Group. *GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10*, 2019. (<http://www.gap-system.org>).
- [4] M. Milanič, A.S. Pedersen, D. Pellicer and G. Verret. *Graphs whose complement and square are isomorphic*. Discrete Mathematics **327** (2014) 62 – 75. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.03.018>.