Un algoritmo lineal para el problema de la k-upla dominación en grafos web

M. Patricia Dobson[1] Valeria A. Leoni[1,2] M. Inés Lopez Pujato[1,2]

1- Facultad de Ciencias Exactas Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario, Argentina.

2- Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina.

(mpdobson@fceia.unr.edu.ar, valeoni@fceia.unr.edu.ar, lpujato@fceia.unr.edu.ar)

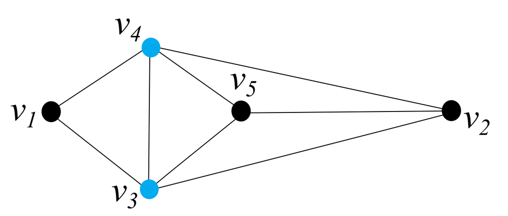
remote 9th LAWCG and MDA November 25th, 2020

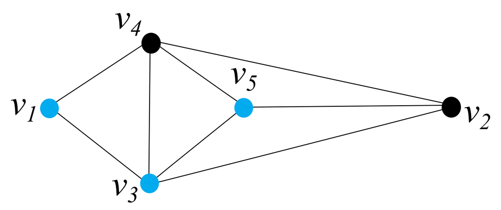
9th Latin American Workshop on Cliques in Graphs in conjunction with Discrete Mathematics and Applications Workshop 2020

Dados un grafo G con conjunto de vértices $V(G)$ y $k \in \mathbb{N}$, $k \leq min\{d(v): v \in V(G)\}+1$, $D \subseteq V(G)$ es un **conjunto k-upla dominante** en G si

$$|N[v] \cap D| \geq k \quad \forall v \in V(G).$$

$N[v]$: vecindad cerrada del vértice v





$k = 2$

$D = \{v_3, v_4\}$ $\qquad$ $D = \{v_1, v_3, v_5\}$

Problema de la k-upla dominación (PkUD), $\quad k \in \mathbb{N}$ fijo

Dado G, el problema consiste en hallar

$$\gamma_{\times k}(G) = min\{|D| : D \text{ es conjunto } k\text{-upla dominante en } G\}$$

[Harary & Haynes, 2000].

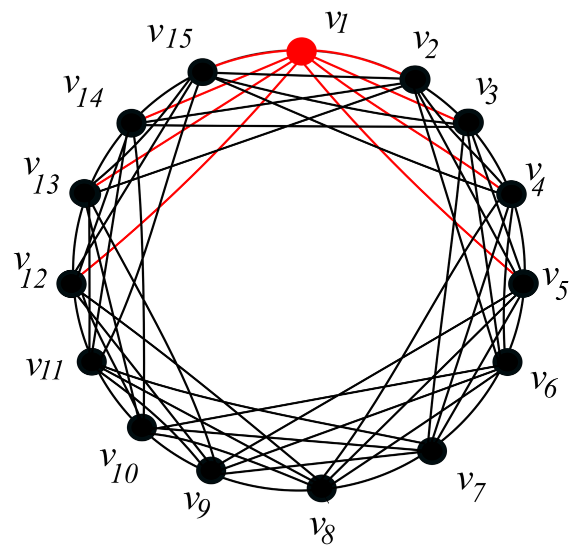
- NP-Completo, aún en grafos cordales [Liao & Chang, 2003].
- P1UD, lineal en grafos arco-circulares [Hsu & Tsai, 1991].
- Complejidad no conocida de PkUD en grafos arco-circulares para $k \geq 2$.

Una subclase de grafos arco-circulares:

Grafo web: $W_n^m \quad n, m \in \mathbb{N} \quad m \geq 1, \quad n \geq 2m+1.$

$V(W_n^m) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}.$

$E(W_n^m) = \{v_i v_j \ : \ j \equiv i \pm l \ (mod\ n),\ l \in \{1, \cdots, m\}\}.$



W_{15}^4

PkUD en grafos web W_n^m: Antecedentes

Teorema [Argiroffo, Escalante & Ugarte, 2010]

$n, m \in \mathbb{N}: \ n = c(2m+1)+r, \quad c \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r \leq 2m.$

- $$\gamma_{\times 2}(W_n^m) = \begin{cases} 2c, & r = 0 \\ 2c+1, & 0 < r \leq m \\ 2c+2, & m+1 \leq r \leq 2m. \end{cases}$$
- $$k\left\lfloor \frac{n}{2m+1} \right\rfloor \leq \gamma_{\times k}(W_n^m) \leq k\left\lceil \frac{n}{2m+1} \right\rceil, \quad \forall \ k \leq 2m.$$

Teorema [Dobson, Leoni & Lopez Pujato, 2019]

$n, m \in \mathbb{N}: \ n = c(2m+1)+r, \quad c \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r \leq 2m.$

$$\gamma_{\times k}(W_n^m) = \left\lceil \frac{kn}{2m+1} \right\rceil, \quad \forall \ k \leq 2m+1.$$

Objetivo: Dado W_n^m, presentar un algoritmo que devuelve un conjunto k-upla dominante en W_n^m de tamaño $\gamma_{\times k}(W_n^m)$.

Notación:

$n, m \in \mathbb{N}: \ n = c(2m+1)+r, \quad c \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq r \leq 2m,$

$M := mcd\,(2m+1, r), \quad [1, x]_{\mathbb{N}} := \{z \in \mathbb{N}: \ 1 \leq z \leq x\}.$

- Para cada $i \in [1, M]_{\mathbb{N}}$:

$[i]_M \rightarrow$ clase de equivalencia de i módulo M,

$S_i := [i]_M \cap [1, n]_{\mathbb{N}}.$

Lema

- $\{S_i\}_{i=1}^{M}$ es una partición de $[1, n]_{\mathbb{N}}$.
- $|S_i| = \dfrac{n}{M} \qquad \forall \ i \in [1, M]_{\mathbb{N}}$.

Identificamos:

$j \in S_i \leftrightarrow v_{m+j} \in V(W_n^m)$ (suma mod n en los subíndices, en $[1, n]$).

Corolario

$\{S_i\}_{i=1}^{M}$ es una partición de $V(W_n^m)$ en conjuntos de tamaño $\dfrac{n}{M}$.

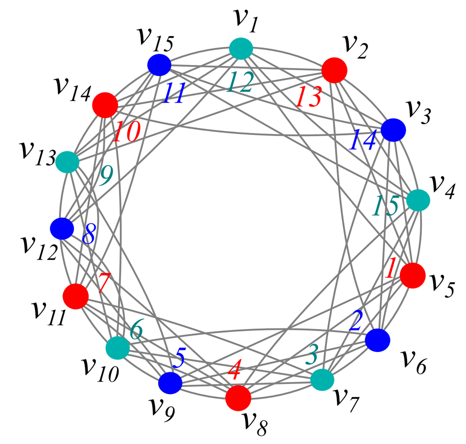
Ejemplo sobre $V(W_{15}^4)$:

$2m+1 = 9,\ r = 6\ ,\ mcd(9, 6) = 3 = M.$

$S_1 = [1]_3 \cap [1, 15]_{\mathbb{N}} = \{1, 4, 7, 10, 13\}$

$S_2 = [2]_3 \cap [1, 15]_{\mathbb{N}} = \{2, 5, 8, 11, 14\}$

$S_3 = [3]_3 \cap [1, 15]_{\mathbb{N}} = \{3, 6, 9, 12, 15\}$



Propiedades de los conjuntos de la partición de $V(W_n^m)$:

Proposición 1:

Dado W_n^m, para cada $v \in V(W_n^m)$ y cada $i \in [1, M]_{\mathbb{N}}$ se tiene $|N[v] \cap S_i| = l$, i.e. **S_i es conjunto l-upla dominante de W_n^m**, donde $\ 2m+1 = lM, \ l \in \mathbb{N}$.

Proposición 2:

Dados W_n^m y $l \in \mathbb{N}$ tal que $2m+1 = lM$, se tiene

$$\gamma_{\times l}(W_n^m) = \frac{n}{M}.$$

Proposición 3:

Para cada $i \in [1, M]_{\mathbb{N}}$ se tiene

$$S_i = \bigcup_{t \in [0,\, n/M-1]_{\mathbb{N}}} \{w \in [1, n] : w \equiv i + t(2m+1)\ (mod\ n)\}.$$

Definición: para $i, j \in V(W_n^m)$, $\ j$ es **1-contiguo** a i si

$$j \equiv i + 2m+1 \ \ (mod\ n).$$

- La 1-contiguidad induce en cada S_i un ordenamiento tal que, empezando por i, cada vértice se obtiene del anterior, como un «movimiento circular» de $2m+1$ posiciones.
- Procedimiento **PROC(n,m,i)** $\rightarrow$ devuelve $\langle S_i \rangle$ (S_i con el ordenamiento).

Procedimiento **DOM** $(n, m, \langle S_j \rangle, \alpha) \rightarrow$ devuelve un conjunto α-upla dominante en W_n^m donde $\alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha \leq l$ y $2m+1 = lM$.

$t = 0$ *....(indica cuál fue el último elemento incorporado a D según $\langle S_j \rangle$).*

$h = 1$

DIV $(n, 2m+1)$ *....(obtiene el resto r de la división entera).*

$M = mcd(2m+1, r)$

$D = \emptyset$

mientras $h \leq \alpha \ \ \wedge \ \ i \leq \dfrac{n}{M}$ *....(h indica que D será un conjunto h-upla dominante en W_n^m).*

$\quad i = t+1$ *....(indica cuál será el próximo elemento a incorporar a D según $\langle S_j \rangle$).*

$\quad$ mientras $s_i^j + 2m < n \ \ \wedge \ \ i \leq \dfrac{n}{M}$

$\quad\quad D = D \cup \{s_i^j\}$

$\quad\quad i = i+1.$ Fin

$\quad D = D \cup \{s_i^j\}$

$\quad h = h+1$

$\quad t = i.$ Fin

Fin Procedimiento

ALGORITMO: Conjunto k-upla dominante mínimo en W_n^m (k-fijo)

Entrada: $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2m+1$.

Salida: Un conjunto k-upla dominante mínimo D en W_n^m.

1: **DIV**$(n, 2m+1)$ y obtener resto r.

2: $M := mcd(2m+1, r)$.

3: **DIV**$(2m+1, M)$ y obtener cociente l.

4: **PROC**$(n, m, 1)$ y obtener $\langle S_1 \rangle$.

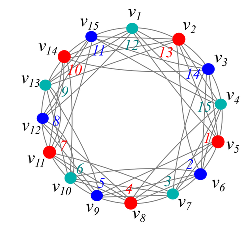
5: Si $k \leq l$ luego $D =$**DOM**$(n, m, \langle S_1 \rangle, k)$.

sino $(k > l)$ hacer **DIV**(k, l) y obtener cociente $\tilde{c}$ y resto $\tilde{r}$.

$D=$ **DOM**$(n, m, \langle S_1 \rangle, \tilde{r}) \cup$ **PROC**$(n, m, 2) \cup \cdots \cup$ **PROC**$(n, m, \tilde{c}+1)$.

$$D = \textbf{DOM}(n, m, \langle S_1 \rangle, \tilde{r}) \cup \bigcup_{i=2}^{\tilde{c}+1} S_i.$$

ALGORITMO LINEAL.



Aplicando el algoritmo en W_{15}^4

$\gamma_{\times k}(W_{15}^4)$	D
$\gamma_{\times 1}(W_{15}^4) = 2$	$\{v_5, v_{14}\}$
$\gamma_{\times 2}(W_{15}^4) = 4$	$\{v_5, v_{14}, v_8, v_2\}$
$\gamma_{\times 3}(W_{15}^4) = 5$	$\{v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}\}$
$\gamma_{\times 4}(W_{15}^4) = 7$	$\{v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}\}$
$\gamma_{\times 5}(W_{15}^4) = 9$	$\{v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3\}$
$\gamma_{\times 6}(W_{15}^4) = 10$	$\{v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3, v_{12}\}$
$\gamma_{\times 7}(W_{15}^4) = 12$	$\{v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3, v_{12}, v_7, v_1\}$
$\gamma_{\times 8}(W_{15}^4) = 14$	$\{v_5, v_{14}, v_8, v_2, v_{11}, v_6, v_{15}, v_9, v_3, v_{12}, v_7, v_1, v_{10}, v_4\}$
$\gamma_{\times 9}(W_{15}^4) = 15$	$V(W_{15}^4)$

REFERENCIAS:

* Argiroffo, G., Escalante, M., Ugarte, M.E., *On the k-dominating set polytope of web graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **36** (2010), 1161–1168.

* Dobson, M.P., Leoni, V., Lopez Pujato, M.I., *Tuple domination on graphs with the consecutive-zeros property*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **346** (2019) 401-411.

* Dobson, M.P., Leoni, V., Lopez Pujato, M.I., *Efficient algorithms for tuple domination on co-biconvex graphs and web graphs*, http://arxiv.org/abs/2008.05345.

* Harary, F., Haynes, T. W., *Double domination in graphs*, Ars Combin. **55** (2000), 201–213.

* Hsu, W.L., Tsai, K.H., *Linear time algorithms on circular-arc graphs*, Inform. Process. Lett. **40**, 3 (1991), 123–129.

* Liao, C.S., Chang, G. J., *k-tuple domination in graphs*, Inform. Process. Lett. **87**, 1 (2003), 45–50.

* Safe, M. D., *Characterization and linear-time detection of minimal obstructions to concave-round graphs and the circular-ones property*, Journal of Graph Theory **93** 2 (2020) 268–298.

* Tucker, A., *Matrix characterizations of circular-arc graphs*, Pacific J. Math. **39.2** (1971), 535–545.