Rotulação $\mathcal{L}(h,k)$ dos Sunlets

J. P. K. Castilho[1] C. N. Campos[1] L. M. Zatesko[2]
joao.castilho@students.ic.unicamp.br
[1]Universidade Estadual de Campinas, Brasil
[2]Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil

UNICAMP

remote
9th LAWCG
and
MDA
November 25th, 2020

1 Introdução

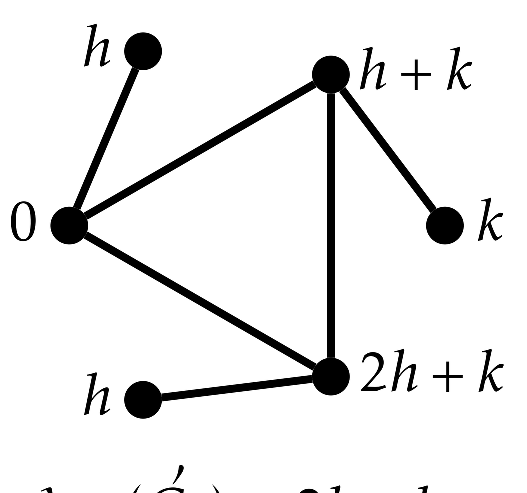
As *rotulações* $\mathcal{L}(h,k)$ foram introduzidas como uma generalização natural das *rotulações* $\mathcal{L}(2,1)$ [1], estas conhecidas por sua importância para o problema de atribuir canais em redes [2].

Rotulação $\mathcal{L}(h,k)$

Sejam $h,k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ e G um grafo simples. Uma *rotulação* $\mathcal{L}(h,k)$ de G é uma função $\sigma\colon V(G) \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ tal que:

(i) $|\sigma(u) - \sigma(v)| \geqslant h$, $\forall uv \in E(G)$;

(ii) $|\sigma(u) - \sigma(v)| \geqslant k$, $\forall uw, wv \in E(G)$, $u \neq v$.



$\lambda_{h,k}(\acute{C}_3) = 2h + k$

Span $\lambda_{h,k}$

Sendo σ uma rotulação $\mathcal{L}(h,k)$ de G:

$$\lambda_{h,k}(\sigma) = \max_{u,v \in V(G)} \{\sigma(u) - \sigma(v)\};$$

e $\lambda_{h,k}(G) = \min_{\sigma}\{\lambda_{h,k}(\sigma)\}$.

O span foi estudado apenas em classes de grafos básicas, como ciclos e caminhos [3], ou classes em contextos muito restritos [1, 4]. Neste trabalho, determinamos o span dos *Sunlets* $\acute{C}_n$, obtidos a partir do C_n adicionando-se um pingente a cada vértice do ciclo.

Outras classes relacionadas que estão sob investigação são os *Caterpillars* e os *Multisunlets*, os últimos obtidos adicionado-se possivelmente mais de um pingente a cada vértice do ciclo.

Financiado parcialmente por CNPq (Proc. 425340/2016-3) e CAPES.

2 O span dos Sunlets

Teorema

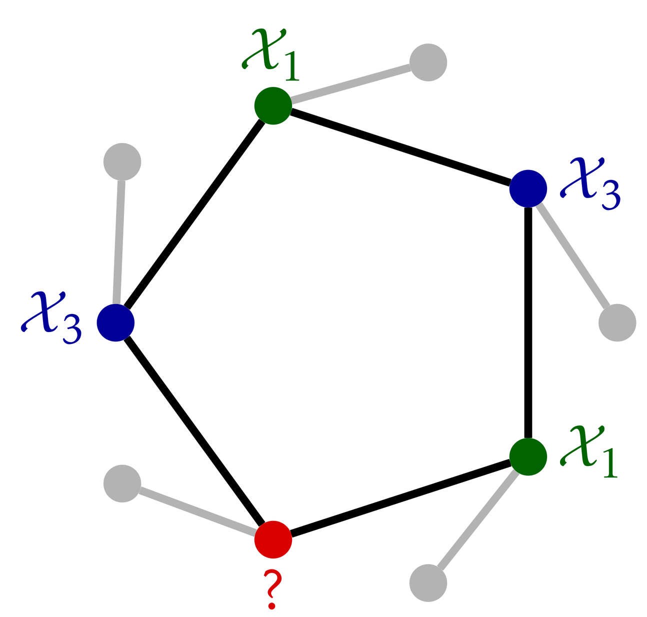
Sejam $h,k,n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ tais que $h \geqslant k$ e $n \geqslant 3$. Então:

$$\lambda_{h,k}(\acute{C}_n) = \begin{cases} h + 3k \text{ se } n = 5 \text{ e } h < 2k; \\ h + 3k \text{ se } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ e } h \geqslant 2k; \\ h + 4k \text{ se } n \equiv 2 \pmod 4 \text{ e } h > 3k; \\ 2h + k \text{ nos demais casos.} \end{cases}$$

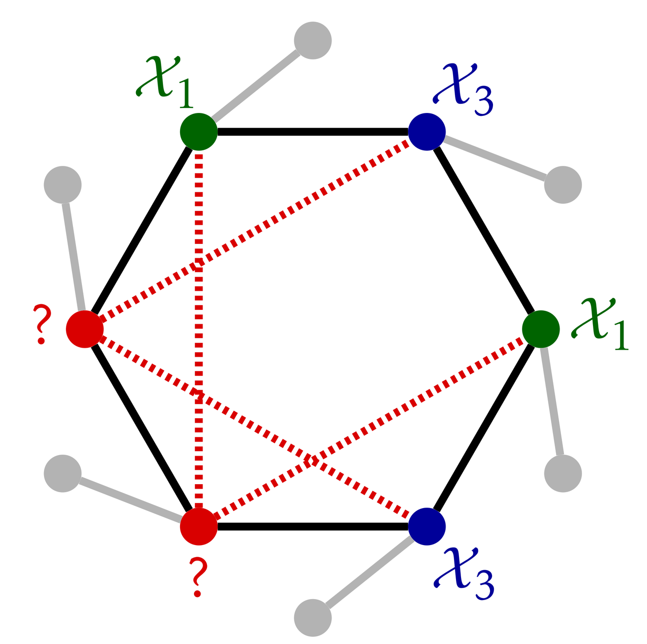
Esboço de demonstração.
($\geqslant$) Por contradição, suponha que exista σ com span menor do que o enunciado pelo teorema. Os rótulos são particionados em três conjuntos. Por exemplo, nos casos em que $\lambda_{h,k}(\acute{C}_n) = 2h + k$,

$$\mathcal{X}_1 = \{0, 1, \ldots, h - k - 1\},$$
$$\mathcal{X}_2 = \{h - k, h - k + 1, \ldots, h + 2k - 1\}, \text{ e}$$
$$\mathcal{X}_3 = \{h + 2k, h + 2k + 1, \ldots, 2h + k - 1\}.$$

Por um lado, mostramos que os rótulos dos vértices do ciclo não podem pertencer a $\mathcal{X}_2$ e, por outro, que não é possível utilizar apenas rótulos de $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_3$ para o ciclo.

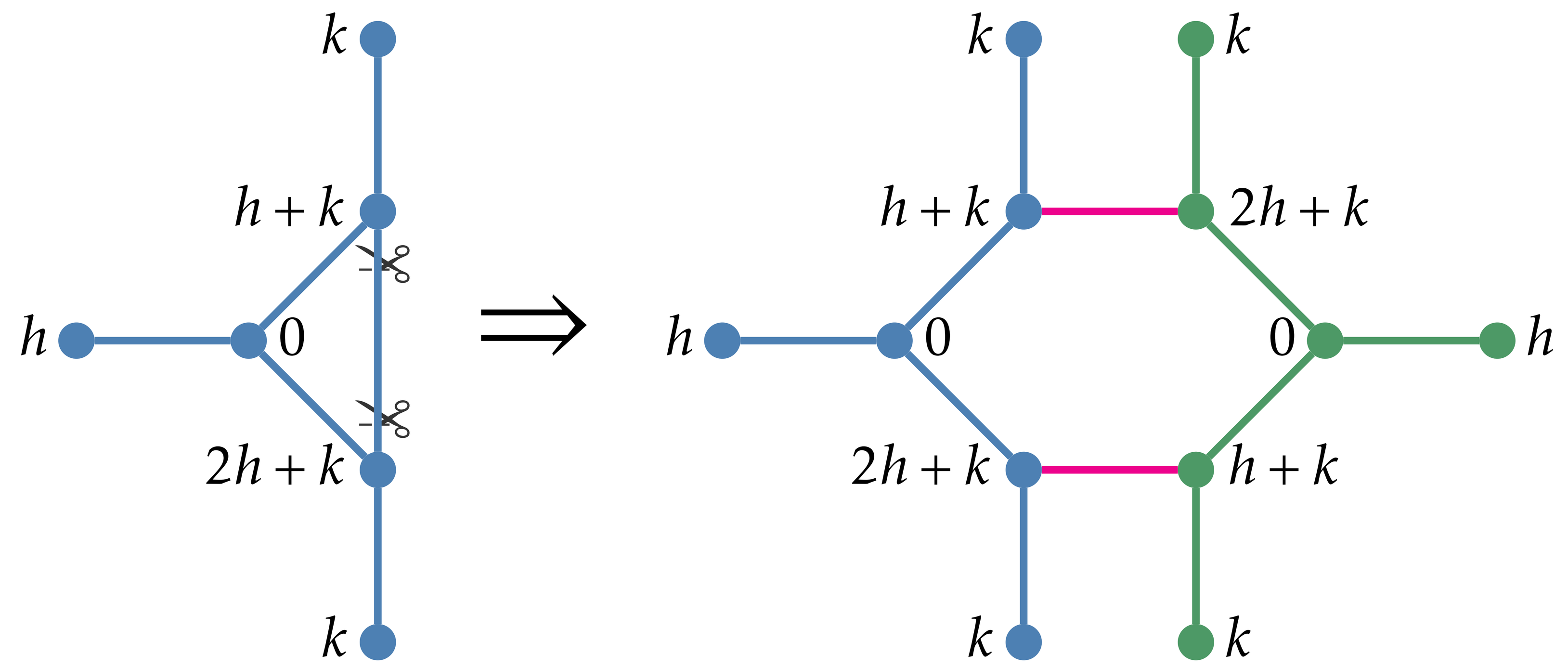


Caso $n \equiv 1 \pmod 2$

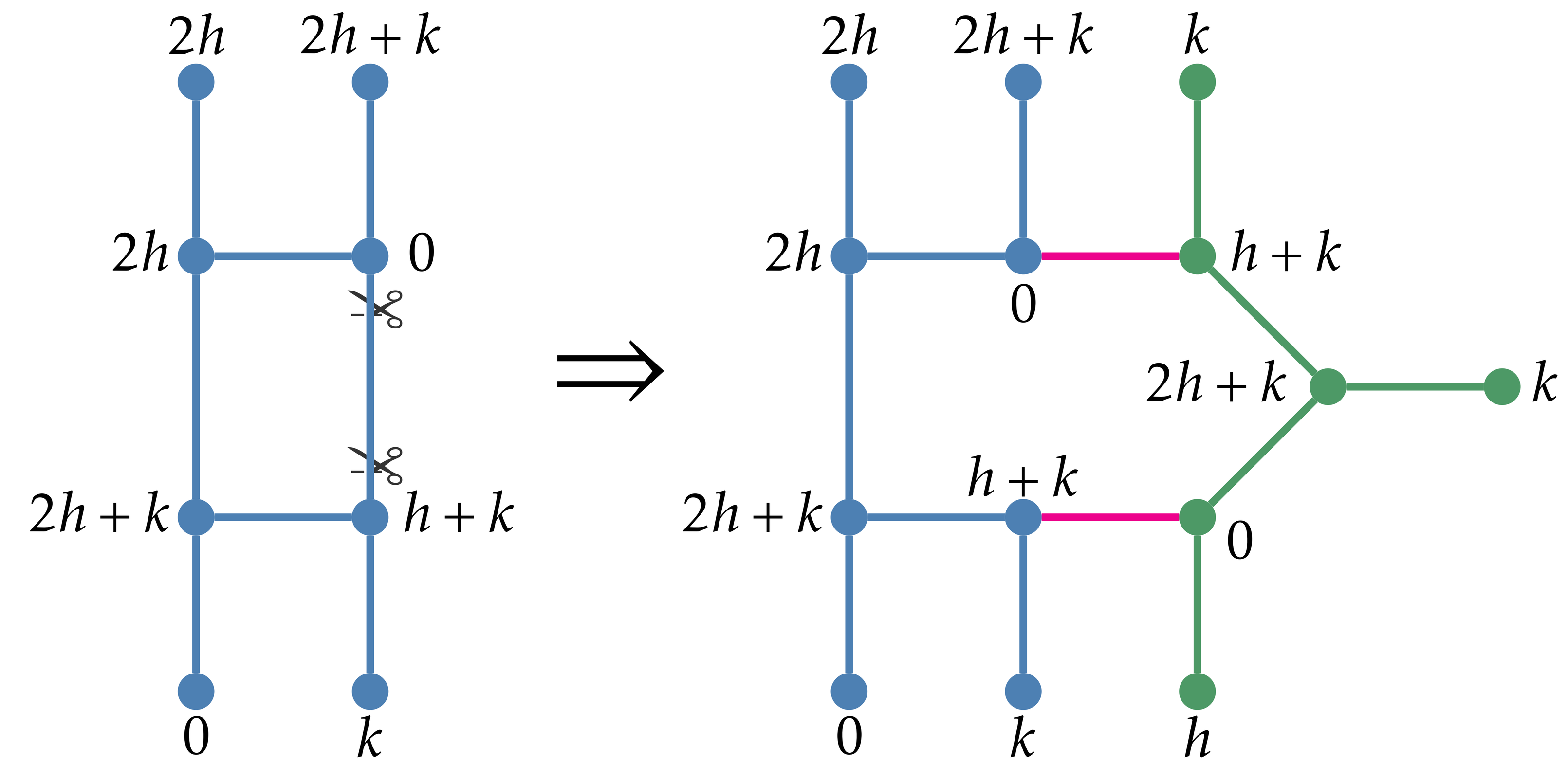


Caso $n \equiv 2 \pmod 4$ e $n \leqslant 3k$

($\leqslant$) Construa a rotulação por blocos pré-definidos a partir de casos-base.



Caso $n \equiv 0 \pmod 3$



Caso $n \equiv 1 \pmod 3$ □

Referências

[1] Calamoneri, T. (2011). The $\mathcal{L}(h,k)$-labelling problem: an updated survey and annotated bibliography. *Comput. J.*, 54:1344–1371.

[2] Griggs, J. R. e Yeh, R. K. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM J. Discrete Math.*, 5:586–595.

[3] Georges, J. e Mauro, D. (1995). Generalized vertex labelings with a condition at distance two. *Congr. Numer.*, 109:141–159.

[4] Georges, J., Mauro, D. e Wang, Y. (2009). Labeling the r-path with a condition at distance two. *Discrete Appl. Math.*, 157:3203–3215.