Emparelhamentos perfeitos no produto cartesiano de árvores

Lilith G. A. O. Barbosa[1], Cybele T. M. Vinagre [2], Mauro N. Weber [3]

[1]Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, lilithgonzalez@id.uff.br; [2]Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, cybele_vinagre@id.uff.br; [3]Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, mauro_weber@id.uff.br

Resumo

Neste trabalho, investiga-se a existência de emparelhamento perfeito no produto cartesiano de duas árvores sem emparelhamento perfeito, focando-se no caso de árvores do tipo *caterpillar*. Especificamente, é descrita uma família infinita de *caterpillars* com um número par de vértices e sem emparelhamento perfeito tais que o produto cartesiano de duas quaisquer destas árvores possui emparelhamento perfeito.

Palavras-chave: Produto cartesiano de grafos; Emparelhamento perfeito. *Caterpillar*.

Introdução

Sejam G_1, G_2 grafos com conjuntos de vértices $V_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$ e $V_2 = \{v_1, \ldots, v_s\}$, respectivamente. O **produto cartesiano de** G_1 **por** G_2, denotado $G_1 \square G_2$, é o grafo com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, no qual (u_i, v_j) e (u_l, v_t) são adjacentes quando u_i é adjacente a u_l em G_1 e $j = t$ ou $i = l$ e v_j é adjacente a v_t em G_2, $1 \leq i, l \leq r$, $1 \leq j, t \leq s$.

Um **emparelhamento** em um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto M do conjunto de arestas E tal que nenhum par de elementos de M possui vértice em comum. Dizemos que o emparelhamento M **satura um vértice** v de G quando alguma aresta de M que incide em v. Dizemos que M é um **emparelhamento perfeito** quando M satura todos os vértices de G. Se o grafo G com n vértices admite emparelhamento perfeito M, então n é par e M tem cardinalidade $n/2$. Um **grafo** que admite um emparelhamento perfeito é chamado **perfeitamente emparelhável**.

É conhecido [1] que se G_1 ou G_2 é perfeitamente emparelhável então $G_1 \square G_2$ também é. Em 2015, A. R.Almeida ([2]), exibiu um grafo G sem emparelhamento perfeito tal que $G \square G$ possui emparelhamento perfeito e levanta a questão: como caracterizar grafos G sem emparelhamento perfeito tais que $G \square G$ possua emparelhamento perfeito?

Dizemos que uma árvore T é do **tipo *caterpillar*** (ou, brevemente, uma ***caterpillar***) se ao retirarmos todos os vértices pendentes, resta um caminho, chamado **corpo** da *caterpillar*.

Neste trabalho, investigamos a questão acima proposta na família das *caterpillars*.

Uma última definição a ser usada em nosso resultado é dada a seguir:

Definição.[3] *Dado $G = (V, E)$, uma partição $P = \{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$ de V é dita uma **partição por estrelas induzidas de** G quando para cada $i, 1 \leq i \leq k$, o subgrafo induzido $G[V_i]$ de G for isomorfo a uma estrela.*

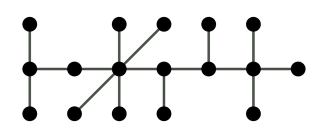

Figure 1:Exemplo de *caterpillar*.

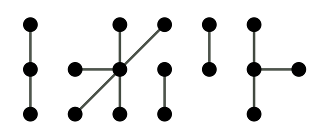

Figure 2:Uma partição por estrelas induzidas formada por $K_{1,2}, K_{1,5}, K_{1,1}, K_{1,1}$ e $K_{1,3}$.

Resultados

Teorema 1 Seja C uma *caterpillar* que admite uma partição por estrelas induzidas que, da esquerda para a direita, é descrita como: uma quantidade ímpar de $K_{1,2}$'s cujos centros coincidem com o corpo, seguida por um número par de $K_{1,1}$'s e, por fim, outra quantidade ímpar de $K_{1,2}$'s com os centros coincidindo com o corpo. Então o produto cartesiano de C por $K_{1,2}$ possui emparelhamento perfeito.

Ideia da prova, com um exemplo:

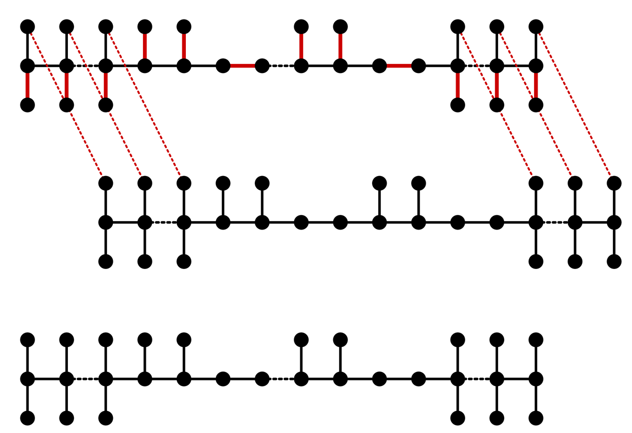

Figure 3:Etapa 1.

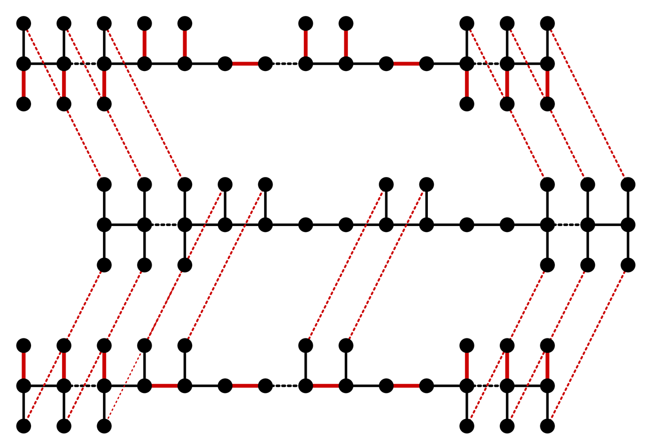

Figure 4:Etapa 2.

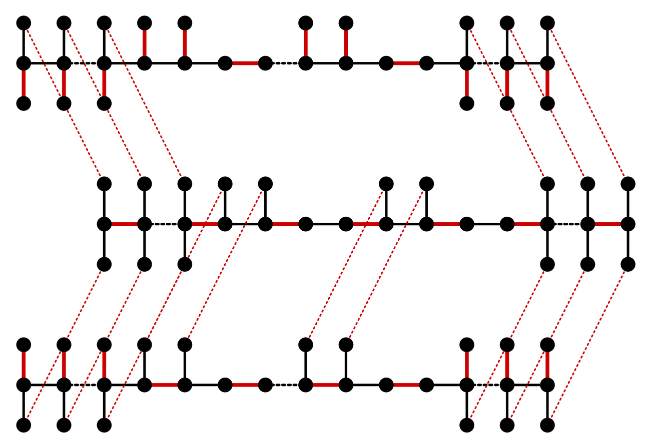

Figure 5:Etapa 3.

Corolário Sejam C_1 e C_2 *caterpillars* tais como a descrita no Teorema 1. Então $C_1 \square C_2$ é perfeitamente emparelhável.

Conclusões

Descrevemos uma família infinita de *caterpillars* sem emparelhamento perfeito tais que o produto cartesiano de qualquer par delas possui emparelhamento perfeito.

Referências

[1] S. KLAVŽAR R. HAMMACK, W. IMRICH.
Product of graphs: Structure and Recognition.
Wiley-Intersciense Series in Discrete Mathematics and Optimization, vol. 56, 2nd edition, 2011.

[2] A.R. ALMEIDA.
Propriedades do produto cartesiano de grafos.
PhD thesis, Instituto de Ciência da Computação, Universidade Federal Fluminense, Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação, Niterói, 2015.
Tese (Doutorado).

[3] M. A. SHALU, S. VIJAYAKUMAR, and T. P. HANDHYA.
The induced star partition of graphs.
In *5th International Conference (CALDAM 2019) Proceedings*, pages 14–16, Kharagpur, India, 2019.

Agradecimentos

L. Barbosa foi bolsista do PIBIC-UFF 2019-2020. M. Weber foi bolsista FAPERJ, processo E-26/202.245/2019.

9th Latin American Workshop on Cliques and Graphs

Discrete Mathematics and Applications Workshop 2020