remote 9th LAWCG and MDA

November 25th, 2020

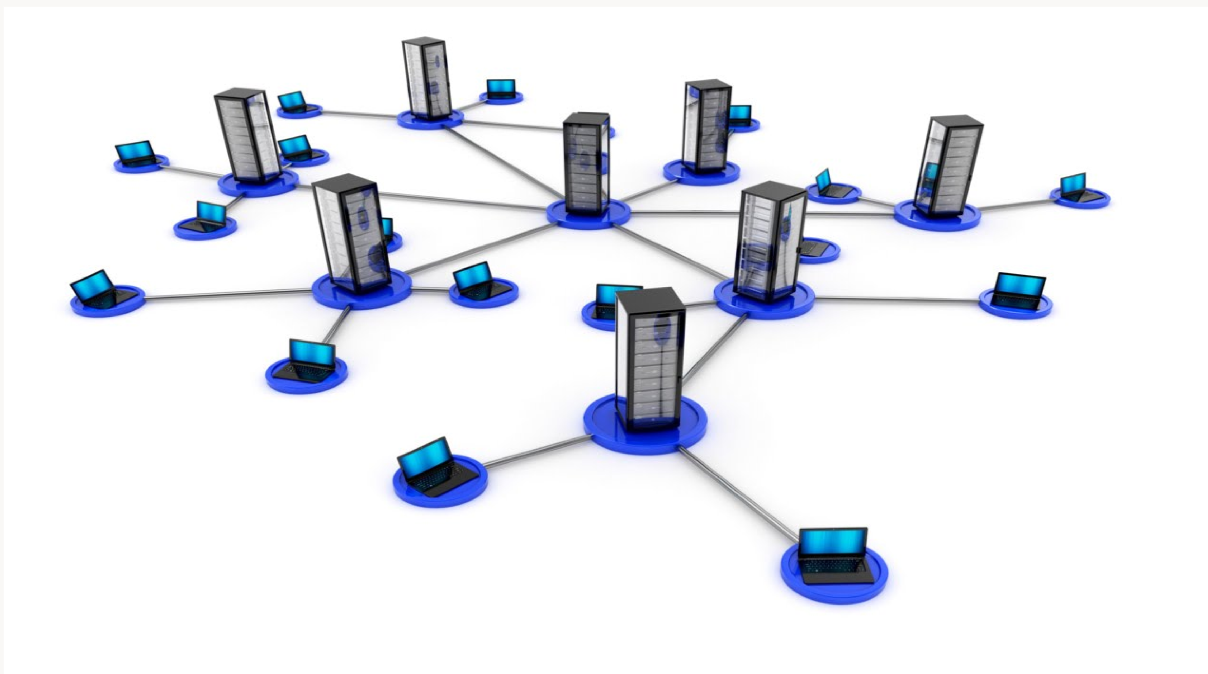
O número de dominação total e independência aberta para produto lexicográfico de grafos

Isabela Carolina Lemes Frota e Erika Morais Martins Coelho
Instituto de Informática - Universidade Federal de Goias, Brasil
isabelacarolina@discente.ufg.br, erikamorais@inf.ufg.br

Introdução

Neste trabalho, consideraremos grafos simples, finitos e não direcionados. Considere a situação em que um grafo G modela uma rede de multiprocessadores com dispositivos de detecção colocados em vértices escolhidos de G. O objetivo desses dispositivos é detectar e identificar com precisão a localização de um processador defeituoso que pode estar presente em qualquer vértice. Às vezes, esse dispositivo pode determinar se um processador defeituoso está em sua vizinhança, mas não pode detectar se o defeito está em sua própria localização. Como é caro instalar e manter dispositivos de detecção, nessa rede cada detector terá no máximo um dispositivo detector em sua vizinhança. Então, queremos determinar a localização do número mínimo de dispositivos que podem, entre eles, determinar com precisão uma falha em qualquer local. Essa situação é uma aplicação direta do conceito de conjuntos dominantes e independentes abertos.

O principal objetivo desse trabalho é a determinação do número de dominação total e independência aberta, γ^{OP}_{OIND}, para o produto lexicográfico de grafos.



Conceitos Básicos

- **Produto Lexicográfico**
  Sejam os grafos G e H, onde os conjuntos de vértices é dado por $V(G) = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ e $V(H) = \{h_1, h_2, ..., h_m\}$. O *produto lexicográfico*, [1, 3], desses dois grafos, representado por $G \circ H$, terá o conjunto de vértices, $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$ e o conjunto de arestas, $E(G \circ H) = \{(g_i, h_j)(g_k, h_l) \mid g_i g_k \in E(G) \text{ ou } g_i = g_k \text{ e } h_j h_l \in E(H)\}$.
- **Conjuntos Dominantes Totais e Independentes Abertos**
  Um *conjunto dominante* de um grafo $G = (V, E)$, é um subconjunto D de $V(G)$ onde cada vértice que não pertence a D é adjacente a pelo menos um vértice de D. O conjunto D é *dominante total* se $\cup_{x \in D} N(x) = V(G)$, ou seja, se $|N(v) \cap D| \geqslant 1$, para todo $v \in V(G)$.
  Um *conjunto independente* de um grafo G é um conjunto S de vértices de G, tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S. O conjunto $S \subseteq V(G)$ é *independente aberto* se para cada $v \in S$, $|N(v) \cap S| \leqslant 1$.
  Denotaremos por $\gamma^{OP}_{OIND}(G)$ a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total e independente aberto de um grafo G, quando existir.

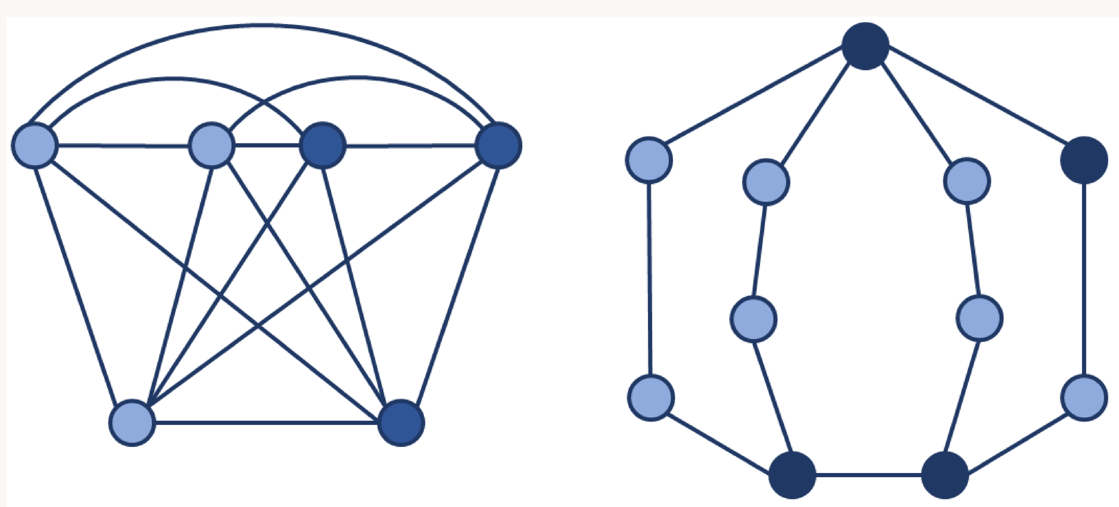


Figura 2: Produto lexicográfico $P_2 \circ C_3$ e um grafo G com $\gamma^{OP}_{OIND}(G) = 4$.

Trabalhos Relacionados

Seo e Slater [2] definem conjuntos dominantes totais e independentes abertos e consideram propriedades adicionais para esse parâmetro em classes específicas de grafos. Em [4], os autores apresentam resultados de conjuntos dominantes totais para produtos lexicográficos e produtos lexicográficos generalizados. Samodivkin, em [5], mostrou resultados de conjuntos dominantes emparelhados, que são conjuntos dominates S em que o subgrafo induzido por S contém um emparelhamento perfeito. Samodivkin provou que o problema de decisão associado a conjuntos dominantes emparelhados é NP-completo mesmo para grafos bipartidos.

Motivadas pelos trabalhos citados nós determinados o valor do número de dominação total e independência aberta para classes simples e para o produto lexicográfico de dois grafos. A Figura 2 exibe grafos e conjuntos independentes, dominantes e dominantes total e independente aberto.

Alguns resultados básicos

Proposição 1 *Seja K_n um grafo completo, para $n \geqslant 2$, então $\gamma^{OP}_{OIND}(K_n) = 2$.*

Proposição 2 *Seja P_n um grafo caminho, para $n \geqslant 2$, então $\gamma^{OP}_{OIND}(P_n) = 2 \cdot \lceil \frac{n}{4} \rceil$.*

Proposição 3 *Seja C_n um grafo ciclo, com $n \geqslant 2$ e $n \neq 5$, então $\gamma^{OP}_{OIND}(C_n) = 2 \cdot \lceil \frac{n}{4} \rceil$.*

Produtos Lexicográficos

Teorema 4 *Sejam G e H dois grafos quaisquer. Se G admite um conjunto dominante total e independente aberto, então $\gamma^{OP}_{OIND}(G \circ H) = \gamma^{OP}_{OIND}(G)$.*

Ideia da prova: Seja G um grafo qualquer com n vértices e com conjunto dominante total e independente aberto D. Considere $V(G) = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$, $V(H) = \{h_1, h_2, \cdots, h_m\}$, $X_i = \{(g_i, h_j) \in V(G \circ H) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ e a componente $G_i = G \circ H[X_i]$ .. Seja $D' = \{(g_i, h_j) \in V(G_i) | g_i \in D \text{ e } j \in \{1, 2, \cdots, m\}\}$. É possível verificar que D' é um conjunto dominante total e independente aberto em $G \circ H$ e logo $\gamma^{OP}_{OIND}(G \circ H) \leqslant \gamma^{OP}_{OIND}(G)$.
Agora, seja D' um conjunto dominante total e independente aberto em $G \circ H$. Seja $D = \{g_i | (g_i, h_j) \in D'\}$. É possível verificar que D é um conjunto dominante total e independente aberto em G. O que implica em $\gamma^{OP}_{OIND}(G \circ H) \geqslant \gamma^{OP}_{OIND}(G)$.

Corolário 5 Seja K_n o grafo completo, C_n o grafo ciclo e P_n o grafo caminho com n vértices. Então,
- $\gamma^{OP}_{OIND}(K_n \circ H) = 2$, para $n \geqslant 2$.
- $\gamma^{OP}_{OIND}(C_n \circ H) = 2 \cdot \lceil \frac{n}{4} \rceil$, para $n \geqslant 2$ e $n \neq 5$.
- $\gamma^{OP}_{OIND}(P_n \circ H) = 2 \cdot \lceil \frac{n}{4} \rceil$, para $n \geqslant 2$.

Agradecimentos

As autoras agradecem ao CNPq pelo apoio a esta pesquisa.

Referências

[1] S. U. Maheswari, M. S. Parvathi., *Independent Dominating Sets of Lexicographic Product Graphs of Cayley Graphs with Arithmetic Graphs, International Journal of Advanced in Management, Technology and Engineering Sciences*, 7(12)(2017), 160-166.

[2] S.J. Seo e P.J. Slater, *Open-independent, open-locating-dominating sets. Elec. Journal of Graph Theory and Applications*, 5 (2) (2017), 179-193.

[3] T. Sitthiwirattham , *DOMINATION ON LEXICOGRAPHICAL PRODUCT OF COMPLETE GRAPHS. International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 85(4)(2013), 745-750.

[4] D.S. Studer, T.W. Haynes, and L.M. Lawson, *Induced-Paired Domination in Graphs, Ars Combinatoria* 57 (2000), 111–128.

[5] Samodivkin, Vladimir, *Domination related parameters in the generalized lexicographic product of graphs*, (2020).